**Aufgabe 1** *(Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung)*
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ \Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ ist.

**Aufgabe 2** *(Zweite Partielle Ableitungen)*
Berechnen Sie die zweiten partiellen Ableitungen von der Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vergleichen Sie die Ergebnis mit dem Satz von Schwarz.

**Aufgabe 3** *(Homogene Funktionen)*
Definition: $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ ist homogen vom Grad $k \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$f(tx) = t^k f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ t > 0.$$

Zeigen Sie, dass

(1) die Formel $\langle Df(x), x\rangle = kf(x)$ gilt,

(2) die Ableitung $\partial_j f$ homogen vom Grad $k-1$ ist.

**Aufgabe 4** *(Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$)*
Sei $U = (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) \subset \mathbb{R}^3$ und $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

die Polarkoordinatenabbildung. Berechnen Sie die die Jacobimatrix von $\phi$ und zeichnen Sie die Parameterlinien.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 10.6.2013, vor der Vorlesung.*